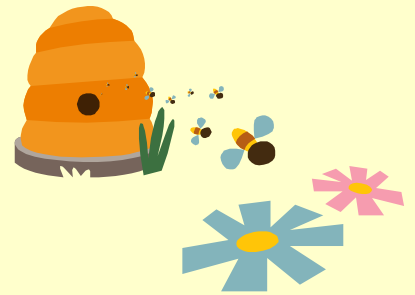


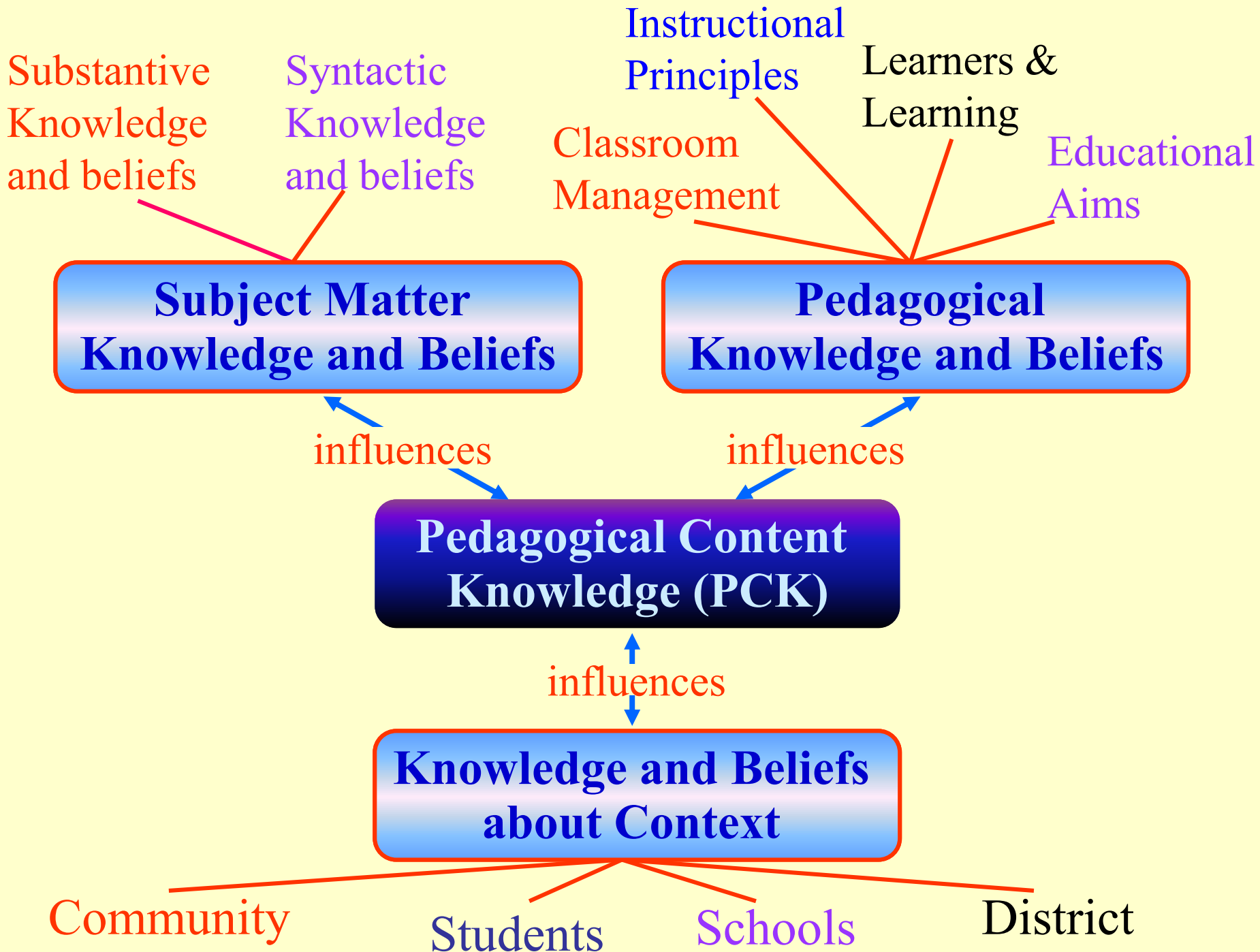
# แนวทางการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์



# ความรู้สำหรับครู

1. ความรู้ในเนื้อหาวิชา
2. ความรู้วิชาครูทั่วไป
3. ความรู้วิชาครูในการสอนเนื้อหา





**ศาสตร์**

**ศิลป์**

**Subject Matter  
Knowledge**

**Pedagogical  
Content  
Knowledge**

**Pedagogical  
Knowledge**

## วิชาคณิตศาสตร์

เข้าใจความคิดของนักเรียน  
และอธิบายให้นักเรียนเข้าใจได้

คำถาม: เด็กนักเรียนสับสนว่าทำไม  $0.2 * 6$  ถึ้นน้อยกว่า 6  
และ  $6/0.2$  ถึ้นมากกว่า 6

คุณวิเคราะห์ว่าทำไมนักเรียนถึ้นเข้าใจผิด และจะอธิบาย  
อย่างไร

ที่มา: TEDS-M 2008

วิเคราะห์ความผิดพลาดและ  
เข้าใจวิธีการหาคำตอบของนักเรียนที่หลากหลายได้

307	307
-168	-168
261	169

ที่มา: Ball & Bass 2003

หาตัวอย่างและโจกย  
เพื่ออธิบายความหมายได้

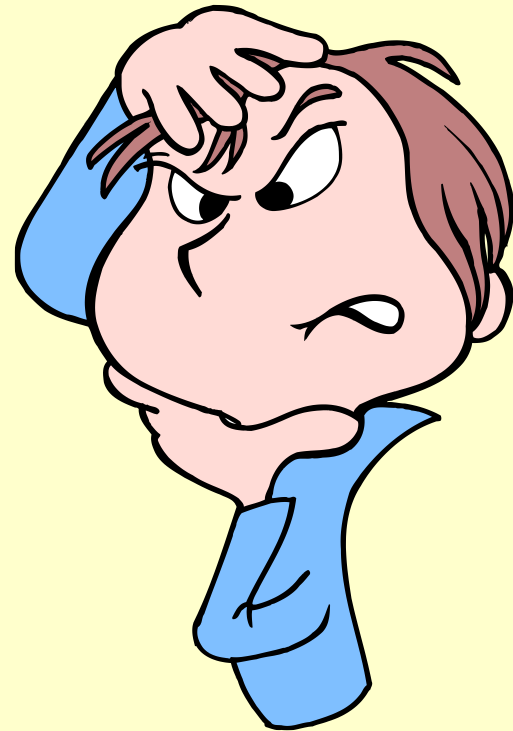
การเลือกโจกยคำถามให้นักเรียนเพื่อวิเคราะห์  
ความเข้าใจของนักเรียน

# ศิลปะในการสอนคณิตศาสตร์

# 1. การถามคำถามที่น่าตื่นเต้น น่าสนใจ

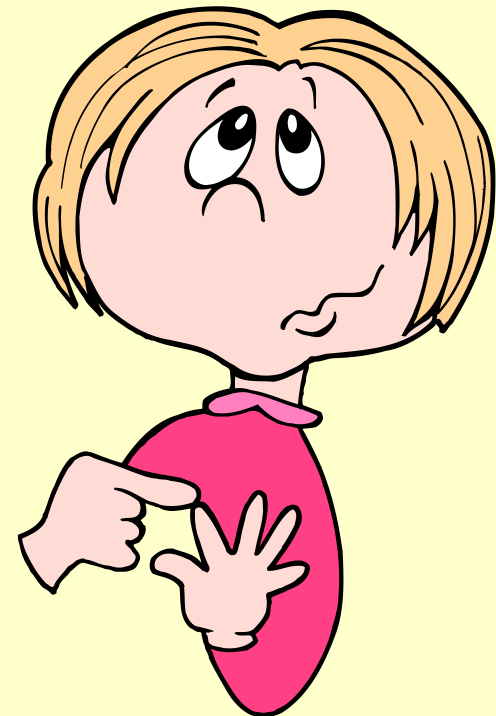
คำถามที่น่าตื่นเต้น น่าสนใจ จะกระตุ้นให้  
ผู้เรียนได้ใช้จินตนาการในการหาคำตอบ ได้ถกเถียง  
หาแนวทางที่เหมาะสมในการหาคำตอบ ภายใต้  
การแนะนำของครู เช่น

1) ครูมีเหรียญบาทอยู่จำนวน 1 ด้านเหรียญ  
นักเรียนคิดว่าถ้าเอาเหรียญทั้งหมดใส่ถุง 1 ถุง  
นักเรียนจะแบกไหวหรือไม่  
เหรียญบาท 1 ด้านเหรียญ  
ควรจะหนักเท่าไร

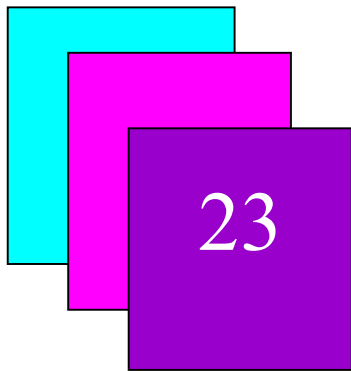




2) ถ้าให้นักเรียนนับ จาก 1 ถึง 1 ล้าน โดย  
อัตราเร็วของการนับ 1 จำนวน ต่อ 2 วินาที  
จนนับเสร็จ นั่นคือ นับ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,...  
ไปเรื่อยๆ โดยไม่หยุดจนกว่าจะเสร็จ  
ถามว่านักเรียนจะใช้เวลานานเท่าไร  
คิดเป็นชั่วโมงได้กี่ชั่วโมง คิดเป็นกี่วัน  
หรือเป็นกี่สัปดาห์

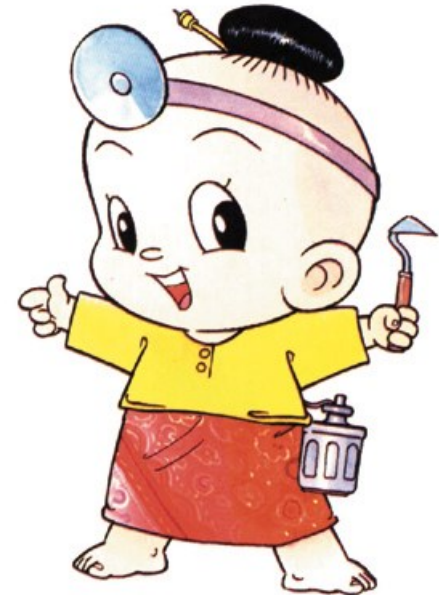


3) มีบัตรตัวเลขอยู่สามใบ แต่ละใบเป็นจำนวนนับที่  
แตกต่างกัน ถ้าจำนวนที่น้อยที่สุดมีค่าเป็น 23  
จับคู่บัตรตัวเลขแต่ละใบและนำมาหาผลบวก  
ปรากฏว่าได้ผลบวกคือ 61, 71 และ 86  
จำนวนที่มีค่ามากที่สุดของบัตรทั้งสามใบคือจำนวนใด



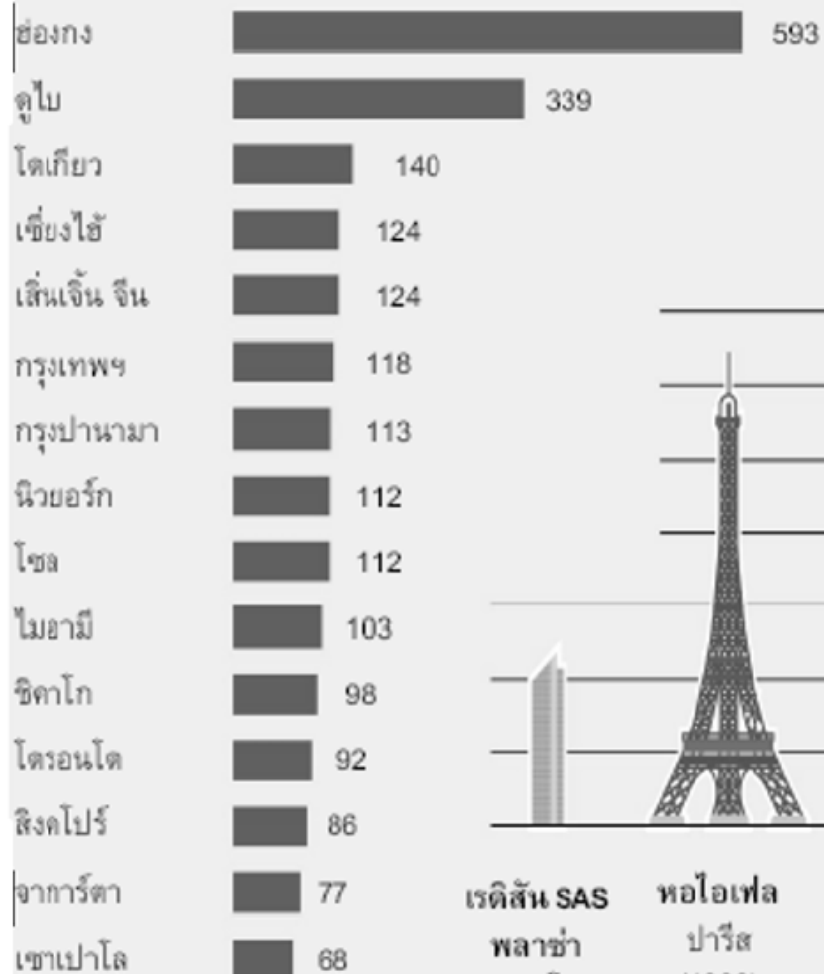
4) อ๋นมีเหรียญ 20 สตางค์ สี่เหรียญ และเหรียญ 50 สตางค์ สองเหรียญ ถ้าอ๋นนำเงินจำนวนหนึ่งไปหยอดกระปุกออมสิน (สอดแทรกคุณลักษณะอันพึงประสงค์เรื่องการอดออม) ข้อใดคือจำนวนเงินที่เหลือที่เป็นไปได้ของอ๋น

- 1) 1.70 บาท
- 2) 1.50 บาท
- 3) 0.90 บาท
- 4) 0.30 บาท



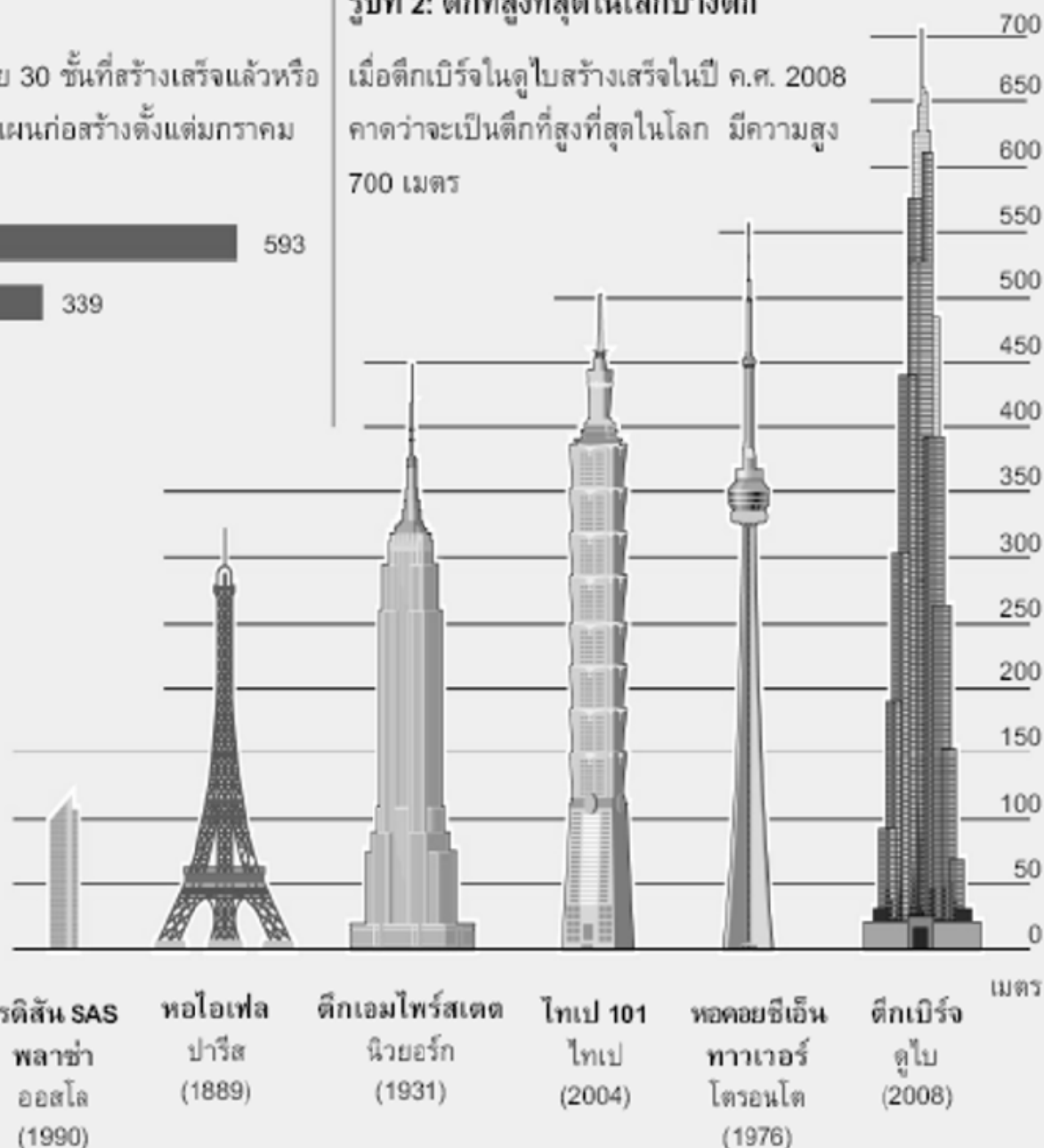
### รูปที่ 1: ตึกสูงในโลก

รูปที่ 1 แสดงจำนวนตึกสูงอย่างน้อย 30 ชั้นที่สร้างเสร็จแล้วหรือกำลังก่อสร้าง ทั้งนี้รวมถึงตึกที่วางแผนก่อสร้างตั้งแต่ มกราคม ค.ศ. 2001



### รูปที่ 2: ตึกที่สูงที่สุดในโลกบางตึก

เมื่อตึกเบิร์จในดูไบสร้างเสร็จในปี ค.ศ. 2008 คาดว่าจะเป็นตึกที่สูงที่สุดในโลก มีความสูง 700 เมตร



ใช้ “ตึกสูง” ในหน้าที่ผ่านมาเพื่อตอบคำถามต่อไปนี้

---

คำถามที่ 1: ตึกสูง

R419Q01 – 0 1 9

ขณะที่บทความนี้ตีพิมพ์ในนิตยสาร ตึกใดในรูปที่ 2 สร้างเสร็จแล้วและสูงที่สุด

.....

---

คำถามที่ 4: ตึกสูง

R419Q04

รูปที่ 1 ให้ข้อมูลอะไร

1. การเปรียบเทียบความสูงของตึกต่าง ๆ
2. จำนวนตึกทั้งหมดในเมืองต่าง ๆ
3. จำนวนตึกที่มีความสูงมากกว่าความสูงระดับหนึ่งของเมืองต่าง ๆ
4. ข้อมูลเกี่ยวกับรูปแบบของตึกในเมืองต่าง ๆ

---

คำถามที่ 5: ตึกสูง

เรดิสัน SAS พลาซ่าในเมืองออสโล ประเทศนอร์เวย์ สูงเพียง 117 เมตร ทำไมจึงนำตึกนี้มาใส่ในรูปที่ 2

.....

.....

## คำถามที่ 9: ตึกสูง

สมมติว่าข้อมูลเกี่ยวกับตึกสูงถูกนำเสนออีกครั้งในบทความเช่นเดียวกันนี้ในอีก 20 ปีข้างหน้า

ข้อความ 3 ข้อความที่อยู่ข้างล่างคือ ลักษณะของบทความเดิม ให้แสดงว่าลักษณะเหล่านี้มีแนวโน้มจะเปลี่ยนแปลงไปในอีก 20 ปีข้างหน้าหรือไม่ โดยเขียนวงกลมล้อมรอบคำว่า “ใช่” หรือ “ไม่ใช่” ในตารางข้างล่าง

ลักษณะของบทความ	มีแนวโน้มจะเปลี่ยนแปลงไปในอีก 20 ปีข้างหน้า ใช่หรือไม่
เมืองที่แสดงในรูปที่ 1	ใช่ / ไม่ใช่
หัวเรื่องของรูปที่ 2	ใช่ / ไม่ใช่
จำนวนของตึกที่แสดงในรูปที่ 1	ใช่ / ไม่ใช่

## คำถามที่ 10: ตึกสูง

R419Q10

ใช้เรื่อง “ตึกสูง” เพื่อตัดสินว่าข้อมูลในแต่ละส่วนของตารางข้างล่างนี้อยู่ในรูปที่ 1 รูปที่ 2 หรือไม่อยู่ทั้งสองรูป

จงเขียนวงกลมล้อมรอบคำว่า “รูปที่ 1” “รูปที่ 2” หรือ “ไม่อยู่ทั้งสองรูป” เพื่อแสดงคำตอบของนักเรียน

ส่วนของข้อมูล	รูปที่ 1 / รูปที่ 2 / ไม่อยู่ทั้งสองรูป
ชื่อของตึกหนึ่งในฮ่องกง	รูปที่ 1 / รูปที่ 2 / ไม่อยู่ทั้งสองรูป
ช่วงเวลาที่ตึกเอ็มไพร์สเตตสร้างเสร็จ	รูปที่ 1 / รูปที่ 2 / ไม่อยู่ทั้งสองรูป
จำนวนตึกที่สร้างในโตรอนโตตั้งแต่ปี 1976	รูปที่ 1 / รูปที่ 2 / ไม่อยู่ทั้งสองรูป



## 2. สอนเพื่อให้นักเรียนค้นพบ

การค้นพบ มีอยู่ 2 แบบ ซึ่งแตกต่างกัน คือ

❖ การค้นพบ โดยการสร้างสรรค์

(creative discovery)

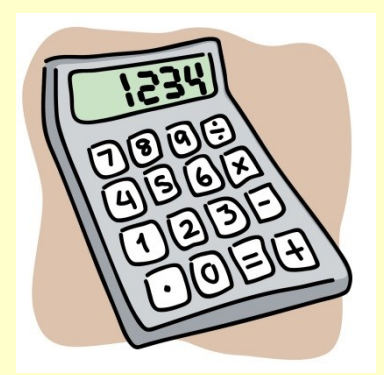
❖ การค้นพบโดยการแนะ

(guided discovery)

# กิจกรรมความหลากหลาย

ใช้ยุทธวิธีใดในการแก้ปัญหา





# ปัญหา

ชายคนหนึ่งได้รับค่าจ้างแรงงาน ในวันแรก  
ได้รับ 1 บาท ในวันที่สอง ได้รับ 2 บาท วันที่สาม  
ได้รับ 4 บาท วันที่สี่ได้รับ 8 บาท วันที่ห้าได้รับ  
16 บาท และต่อไปเช่นนี้เรื่อยๆ ถ้าชายคนนี้ทำงานอยู่  
16 วัน จะได้รับค่าจ้างเป็นเงินเท่าไร

2 วัน

3 วัน

4 วัน

5 วัน

1

1

1

1

2

2

2

2

รวม 3

4

4

4

รวม 7

8

8

รวม 15

16

รวม 31

---

ครูควรซักถามนักเรียนให้นักเรียนสังเกต

ความสัมพันธ์ว่า ผลบวกของค่าจ้าง 3 วันน้อยกว่า  
ค่าจ้างของวันที่สี่อยู่ 1 บาท ผลบวกของค่าจ้าง 4 วัน  
น้อยกว่าค่าจ้างของวันที่ห้าอยู่ 1 บาท ผลบวกของ  
ค่าจ้าง 5 วัน น้อยกว่าค่าจ้างของวันที่หกอยู่ 1 บาท  
เช่นเดียวกัน ผลบวกของค่าจ้าง  $n$  วัน น้อยกว่าค่าจ้าง  
ของวันที่  $(n + 1)$  อยู่ 1 บาท

ผลรวมของ 16 วัน หาได้จาก

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1,024 + 2,048 \\ + 4,096 + 8,192 + 16,384 + 32,768$$



ซึ่งผลบวกนี้น้อยกว่าค่าจ้างวันที่ 17 อยู่ 1 บาทและค่าจ้าง  
วันที่ 17 เท่ากับ  $2 \times 32,768 = 65,536$  บาท

ดังนั้น ผลรวม สำหรับ 16 วัน

เท่ากับ  $65,536 - 1 = 65,535$



# ปัญหา กระดาษชุด A

กระดาษขนาด A4 มีขนาดตามที่กำหนดไว้เป็น  
มาตรฐานนานาชาติ

กระดาษ A4 มีขนาดเท่าใด และมีที่มาอย่างไร



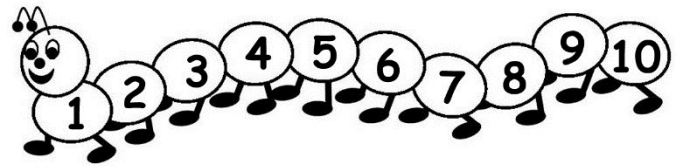


กำหนดขนาดของกระดาษขนาด A0

841 x 1189 ตารางมิลลิเมตร

ให้แต่ละกลุ่มช่วยกันหาขนาดของกระดาษ A4





# กระดาษชุด A

เริ่มจาก กำหนดให้กระดาษขนาด A0 มีพื้นที่  
เทียบเท่า 1 ตารางเมตร

กระดาษ A1 มีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของกระดาษ A0

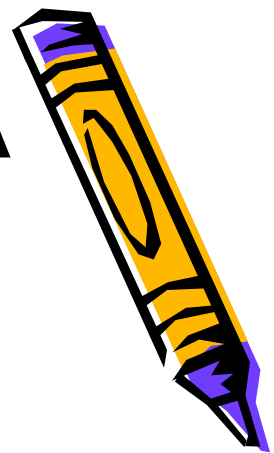
กระดาษ A2 มีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของกระดาษ A1

กระดาษ A3 มีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของกระดาษ A2

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนได้กระดาษ A4, A5, A6, ..., A10

กระดาษขนาด	ขนาดกระดาษ (ตารางมิลลิเมตร)
A0	841 x 1189
A1	594 x 841
A2	420 x 594
A3	297 x 420
A4	210 x 297
A5	148 x 210
⋮	⋮
A10	...

# สังเกตพบอะไรบ้างจากกระดาษชุด A



- ความกว้างและความยาวของกระดาษเกี่ยวข้องกันอย่างไร
- พื้นที่ของกระดาษขนาด **A0** เท่ากับเท่าไร
- พื้นที่ของกระดาษขนาด **A1** คิดเป็นเศษส่วนเท่าใดของพื้นที่ของกระดาษขนาด **A0**
- พื้นที่ของกระดาษขนาด **A2** คิดเป็นเศษส่วนเท่าใดของพื้นที่ของกระดาษขนาด **A0**
- พื้นที่ของกระดาษขนาด **A4** คิดเป็นเศษส่วนเท่าใดของพื้นที่ของกระดาษขนาด **A0**



• ให้หาวิธีการพับและตัดกระดาษขนาด **A4** ให้ได้กระดาษขนาด **A6** แล้วตรวจสอบขนาดของกระดาษที่ได้กับค่าในตาราง

### 3. ทำคณิตศาสตร์ให้มีชีวิตชีวา

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

เมื่อเขาอายุได้สิบปี ในโรงเรียนที่เขาเรียนอยู่ ครูต้องการให้ห้องอยู่ในความสงบ ครูจึงตั้งให้นักเรียนหาผลบวกของจำนวน จาก 1 ถึง 100 เกือบทันทีทันใด Gauss หยิบกระดานชนวนขึ้นมา และเขียนคำตอบลงไป เมื่อทุกคนทำเสร็จแล้ว ครูต้องแปลกใจอย่างยิ่งที่พบว่า Gauss เป็นเพียงคนเดียวที่หาคำตอบได้ถูกต้อง คือ 5050 แต่ไม่ได้แสดงวิธีคำนวณ

### 3. ทำคณิตศาสตร์ให้มีชีวิตชีวา (ต่อ)

Gauss หาผลบวกในใจของ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

โดยสังเกตว่า

$$1 + 100 = 101, 2 + 98 = 101, 3 + 97 = 101$$

และคู่อื่นๆ ซึ่งบวกกันได้ 101 ซึ่งมี 50 คู่

ดังนั้นผลบวกของ 1 ถึง 100

$$\text{เท่ากับ } 50 \times 101 = 5050$$

# Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \end{array}$$

---

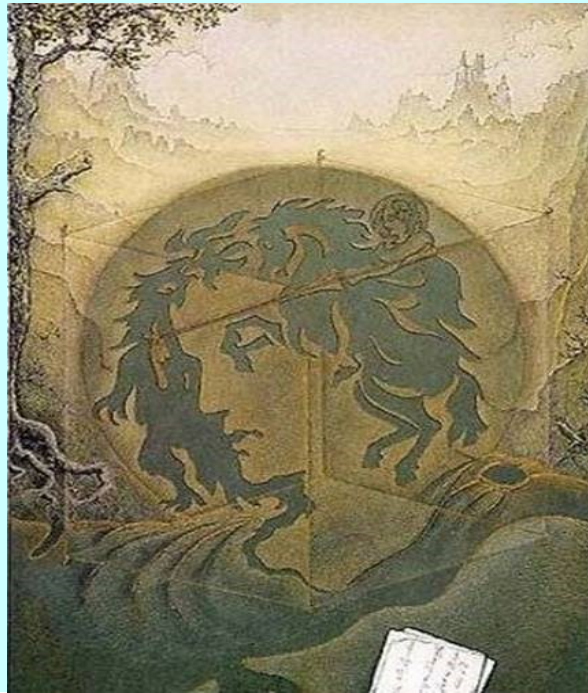
$$101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

จะได้  $(100 \times 101) \div 2 = 5050$

# การนำวิธีของ **Gauss** มาหาผลบวกของจำนวนคี่

ผลบวกของจำนวนคี่ทั้งหมดตั้งแต่ 1 ถึง 99

มีค่าเท่าใด

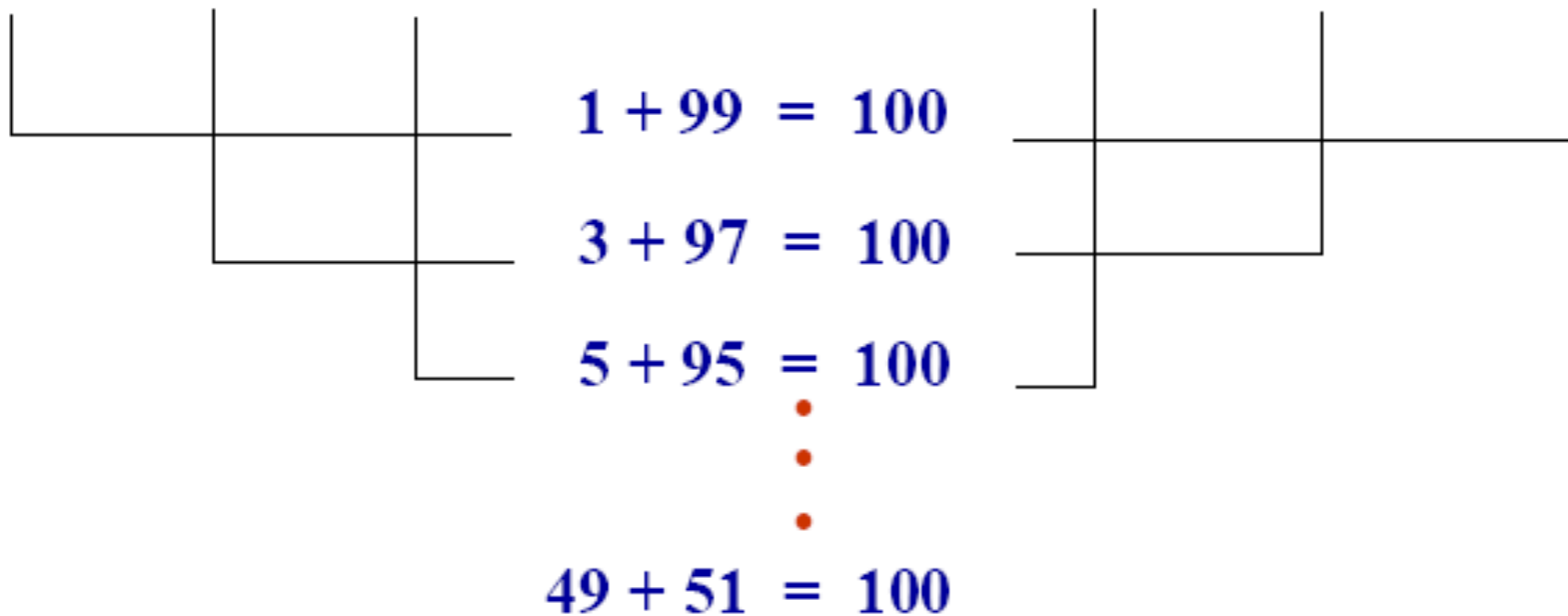




# Carl Friedrich Gauss

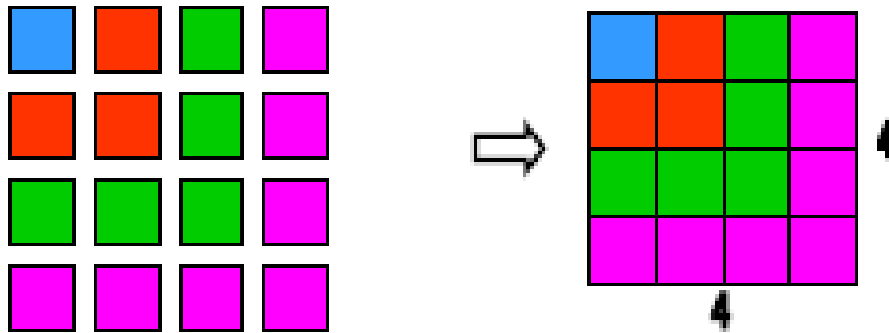
วิธีที่ 1 : ใช้วิธีเช่นเดียวกับ **Guass**

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 95 + 97 + 99 =$$



# Carl Friedrich Gauss

## วิธีที่ 2: ใช้แบบรูป



ผลบวกของจำนวนคี่ 1 จำนวนแรก คือ  $1 = 1 = 1 \times 1$

ผลบวกของจำนวนคี่ 2 จำนวนแรก คือ  $1 + 3 = 4 = 2 \times 2$

ผลบวกของจำนวนคี่ 3 จำนวนแรก คือ  $1 + 3 + 5 = 9 = 3 \times 3$

ผลบวกของจำนวนคี่ 4 จำนวนแรก คือ  $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 \times 4$

ผลบวกของจำนวนคี่ 50 จำนวนแรก คือ  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 = 50 \times 50$

## 4. เริ่มหรือจบคาบสอนด้วยปัญหาที่น่าสนใจ

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างปัญหาที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้  
ปัญหา

ให้นักเรียนเขียนตัวเลข 2 หลักหนึ่งจำนวนซึ่งอยู่ระหว่าง 50 และ 100 โดยที่ครูไม่ทราบที่นักเรียนเขียนจำนวนใด ให้บวกจำนวนดังกล่าวด้วย 76 ตัดตัวเลขในหลักร้อย แล้วนำเลขที่ตัดออกนั้นไปบวกกับตัวเลขสองหลักที่เหลือ ขั้นสุดท้ายให้นำจำนวนที่ได้ไปลบออกจากจำนวนเริ่มต้น ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเป็น 23 ทุกครั้งไม่ว่านักเรียนจะเริ่มต้นด้วยตัวเลขใด เพราะเหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น

# ปัญหา

ครูเขียนตัวเลข 15,873 บนกระดานดำ และบอกว่าตัวเลขนี้เป็น  
ตัวเลขมหัศจรรย์ เพื่อให้นักเรียนเห็นความมหัศจรรย์ให้นักเรียนหา  
ผลลัพธ์ของ

1.  $15,873 \times 7 = \dots\dots\dots$

2.  $15,873 \times 14 = \dots\dots\dots$

3.  $15,873 \times 21 = \dots\dots\dots$

4.  $15,873 \times 28 = \dots\dots\dots$

5.  $15,873 \times 35 = \dots\dots\dots$

6.  $15,873 \times 42 = \dots\dots\dots$

7.  $15,873 \times 49 = \dots\dots\dots$

8.  $15,873 \times 56 = \dots\dots\dots$

9.  $15,873 \times 63 = \dots\dots\dots$

ลองหาคำตอบด้วยตนเอง

# เลขมหัศจรรย์

- นำ 13,837
- คูณด้วยอายุของท่าน
- คูณด้วย 73
- คำตอบ

# 1. ทำตามขั้นตอนต่อไปนี้

เลือกจำนวนขึ้นมา 1 จำนวน

คูณด้วย 2

บวกด้วย 10

หารด้วย 2

นำจำนวนเดิมที่เลือกไว้มาลบออก

2. ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่าใด

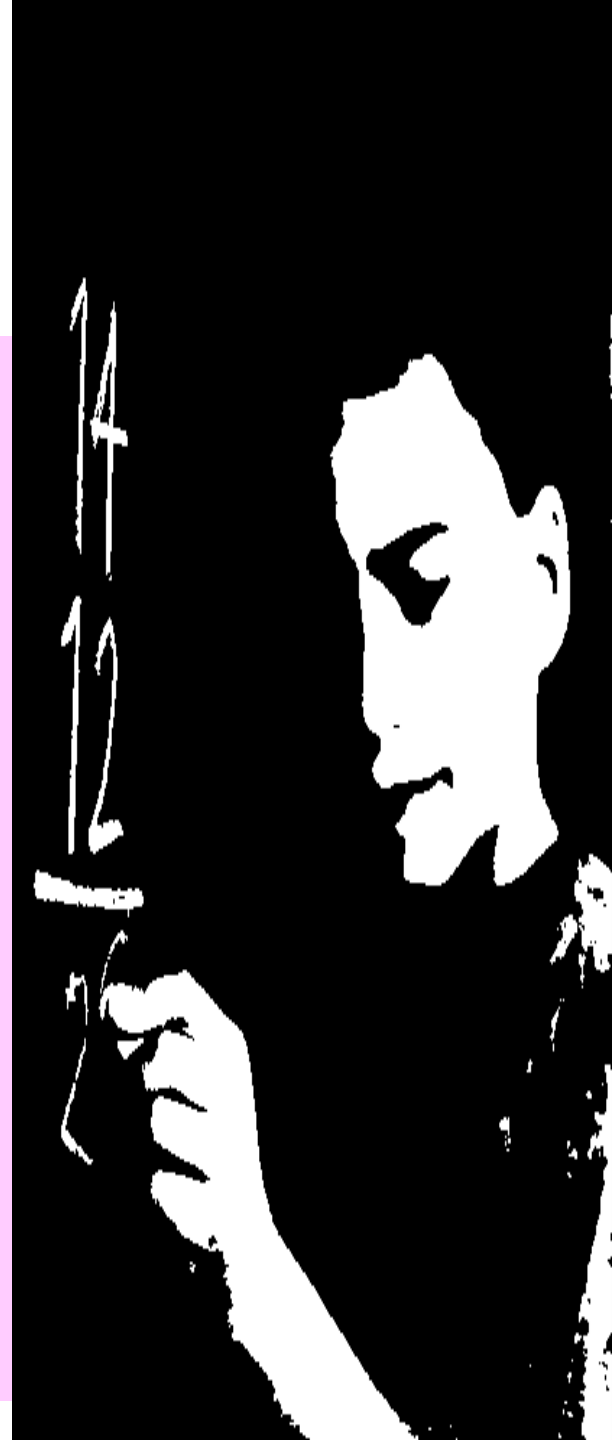
3. ทำไมจึงได้เท่านี้ ลองเลือกจำนวนอื่นหรือเปรียบเทียบ  
ผลลัพธ์ที่ได้กับเพื่อนในห้อง

4. สร้างแบบรูปหรือกฎเกณฑ์ทั่วไปจากผลที่ได้ในข้อ 1 และ 3



# ปริศนาทายอายุ

- เขียนอายุซึ่งเป็นจำนวนเต็มปี
- คูณด้วย **100**
- บวกด้วย **2**
- บวกด้วยหมายเลขเดือนเกิด
- คูณด้วย **100**
- บวกด้วยวันที่เกิด
- ลบด้วย **200**



# ตัวเลขอาถรรพ์

- อาร์เจนตินา  $1978 + 1986 = 3964$
- เยอรมัน  $1974 + 1990 = 3964$
- บราซิล  $1966 + 1998 = 3964$
- บราซิล  $1962 + 2002 = 3964$
- ?  $? + 2010 = 3964$



# ตัวอย่างแหล่งของปัญหาหรือข้อสอบ

- <http://www.uidaho.edu/LS/Math/imc/>
- <http://www.forum.swarthmore.edu/k12/mathtips>
- <http://www.sln.fi.edu/school/math2>
- <http://www.wits.ac.za/ssproule/pow.htm>
- <http://www.thewizardofodds.com/math>
- Yeap Ban Har

เป็นต้น

## 5. การใช้สื่อการสอนอย่างมีประสิทธิภาพ

**สื่อการสอนคณิตศาสตร์** ได้แก่ วัสดุอุปกรณ์ชนิดต่างๆ  
แบบจำลอง สิ่งประดิษฐ์ รูปภาพ แผนภูมิหรือเครื่องมือแบบต่างๆ  
ที่สนองจุดมุ่งหมายในการเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนการสอน  
คณิตศาสตร์

**สื่อการสอนอาจจำแนกได้เป็น** ของจริง และสิ่งแวดล้อม  
สิ่งประดิษฐ์หรือเครื่องมือ อุปกรณ์ รวมทั้งกิจกรรมหรือเกม ต่างๆ

**กระบวนการคิดกับการสอนคณิตศาสตร์**

**กระบวนการคิด** คือ ขั้นตอนในการคิด  
เพื่อให้ได้ความคิดที่ต้องการออกมา  
กระบวนการคิดที่สำคัญ ๆ และมีความจำเป็น  
ต่อการเรียนคณิตศาสตร์ เช่น

กระบวนการคิดวิจารณ์ญาณ (Critical Thinking)

กระบวนการคิดสร้างสรรค์ (Creative Thinking)

กระบวนการคิดตัดสินใจ (Decision Thinking) หรือ

กระบวนการคิดไตร่ตรอง ( Reflective Thinking)

กระบวนการแก้ปัญหา (Problem Solving)

# กลวิธีที่ครูใช้ในการทำให้การคิดมีชีวิตชีวาขึ้นมา ในชั้นเรียน

- ❖ คิดให้ดัง (Thinking Aloud)
- ❖ ชื่นชมการคิดที่เยี่ยมยอด
- ❖ ทำให้การสอนการคิดชัดเจนในชั้นเรียน
- ❖ ถามคำถามที่ขยายและส่งเสริมการคิด
- ❖ การวางแผนการคิดในชั้นเรียน
- ❖ สอนกลวิธีในการคิด

# ทักษะการคิดที่จำเป็นสำหรับวิชาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา

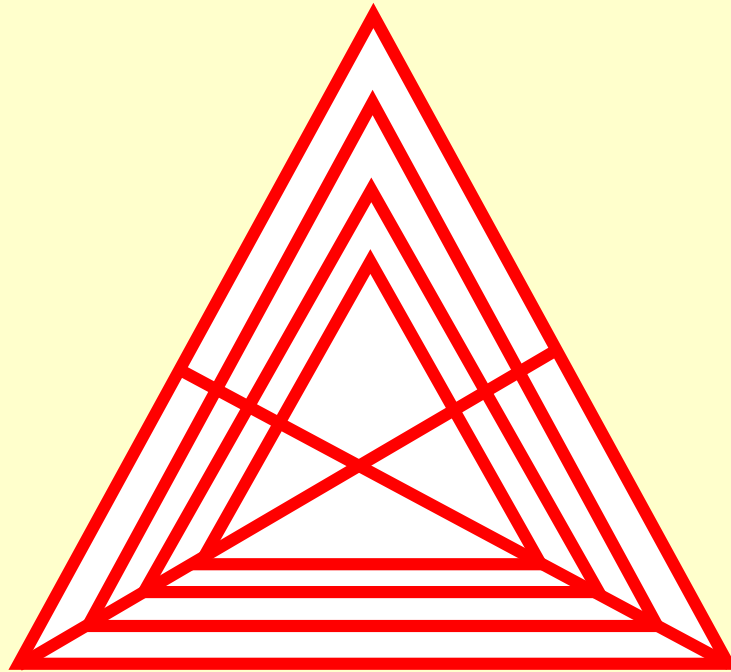
- ❖ การจำแนกกลุ่ม (Classifying)
- ❖ การเปรียบเทียบ (Comparing)
- ❖ การเรียงลำดับ (Sequencing)
- ❖ การวิเคราะห์ส่วนประกอบและภาพรวม  
(Analyzing Parts and Whole)

# ทักษะการคิดที่จำเป็นสำหรับวิชาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา

- ❖ **การหาแบบรูปและความสัมพันธ์**  
(Identifying Patterns & Relationships)
- ❖ **การอุปนัย (Induction)**
- ❖ **การนิรนัย (Deduction)**
- ❖ **การนึกภาพ (Spatial Visualization)**
- ❖ **การคิดวิเคราะห์ (Analytical Thinking)**

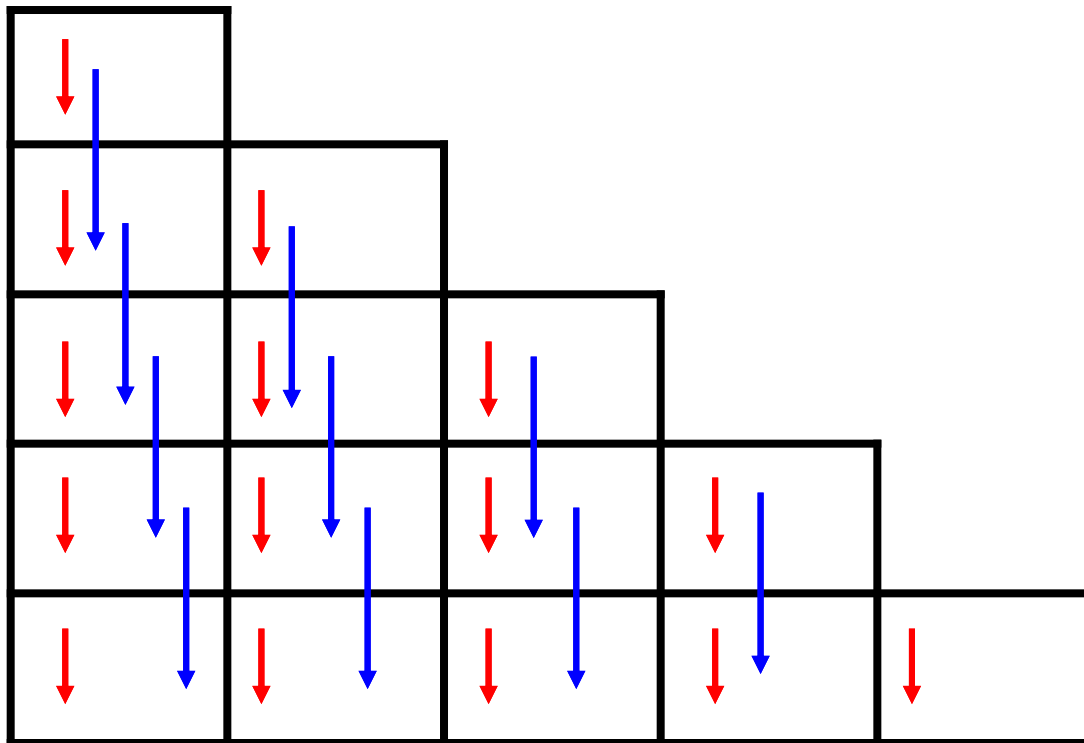
# ตัวอย่างโจทย์การคิดวิจารณ์ญาณ (Critical Thinking)

❖ จงพิจารณารูปแล้วตอบว่ามีรูปสามเหลี่ยมกี่รูป





# ตัวอย่างโจทย์การคิดวิจารณ์ญาณ (Critical Thinking)



นับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้ทั้งหมดกี่รูป

นับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยแบ่งตามขนาด ได้ดังนี้

$$1 \times 1 = 15 \text{ รูป} \quad 2 \times 2 = 6 \text{ รูป}$$

$$1 \times 2 = 20 \text{ รูป} \quad 2 \times 2 = 6 \text{ รูป}$$

$$1 \times 3 = 12 \text{ รูป} \quad 2 \times 2 = 2 \text{ รูป}$$

$$1 \times 4 = 6 \text{ รูป} \quad 2 \times 2 = 1 \text{ รูป}$$

$$1 \times 5 = 2 \text{ รูป}$$

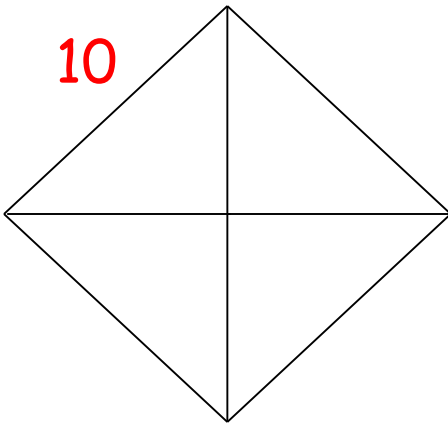
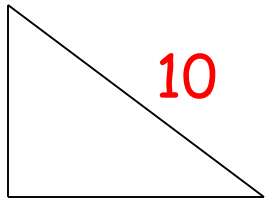
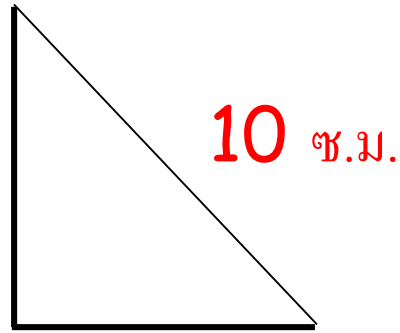
รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีทั้งหมด **70** รูป

# ขยายปัญหา

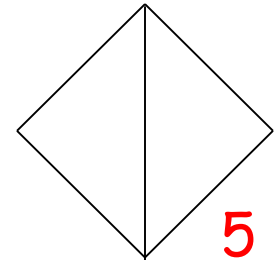
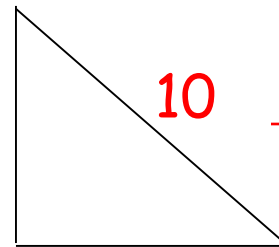
นับอย่างไร ให้ได้ครบ

เฉลี่ย

# จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากต่อไปนี้



หรือ



There are 3 ways to express 15 as the sum of consecutive whole numbers:

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$15 = 4 + 5 + 6$$

$$15 = 7 + 8$$

17 can only be expressed in 1 way:

$$17 = 8 + 9$$

16 can not be done at all.

- a. Investigate other numbers.
- b. Make a report to findings, arranging them in a logical way. Show what you did to find the number of yours

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 4 = 7$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$2 + 3 + 4 = 9$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$3 + 4 + 5 = 12$$

$$2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18$$



การคิดวิจารณ์  
**(Critical Thinking)**

**To identify and question assumptions.**

**To detect errors in thoughts.**

**To consider context.**

# ตัวอย่างโจทย์การคิดริเริ่มสร้างสรรค์ (Creative Thinking)

- ❖ ศึกษาจำนวนในตารางข้างล่างนี้แล้วบอกว่า  
แถวไหนที่ไม่เหมือนแถวอื่น

แถวที่ 1	2	5	10
แถวที่ 2	4	6	24
แถวที่ 3	2	8	12
แถวที่ 4	4	5	15



หมูนี้องชาย 2 คน  
กตมีพี่ชาย 2 คน  
และอ้อมมีพี่น้องผู้ชาย 2 คน

ถ้านำคนทั้งหมดเข้าไปนั่งในรถแวน (รถตู้) ที่ว่างเปล่า  
จะมีเด็กผู้ชายในรถแวน (รถตู้) ทั้งหมดกี่คน

ถ้าคำตอบ  $2 + 2 + 2$  ไม่ถูกต้อง ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น

คำว่า "รถแวนที่ว่างเปล่า" มีความสำคัญในการพิจารณาคำตอบ  
ท่านเห็นด้วยหรือไม่

ถ้าคำตอบคือ 3 เงื่อนไขใดที่ทำให้คำตอบนี้ถูกต้อง

การคิดแบบสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์

# (Mathematical Creative Thinking)

fluency → you can make another one.

flexible → may be think in many ways.

original → indicate to creative thinking.

elegant → very easy to understand.

elaborate → science

การคิดค้นสิ่งประดิษฐ์

ถ้ามีผู้เข้าร่วมแข่งขันในรายการเทนนิสรายการหนึ่ง  
ซึ่งจัดการแข่งขันแบบแพ้คัดออกทั้งหมด 1,024 คน  
จะต้องจัดการแข่งขันทั้งหมดกี่คู่  
จึงจะได้ผู้ชนะเลิศในรายการแข่งขันนี้



# ตาราง แสดงวิธีการหาคำตอบสองวิธี (วิธี A และวิธี B) จากปัญหาเดียวกัน

## วิธี A

ในรอบที่หนึ่ง จัดการแข่งขัน 512 คู่  
ในรอบที่สอง จัดการแข่งขัน 256 คู่  
ในรอบที่สาม จัดการแข่งขัน 128 คู่  
. . .  
ดังนั้น จำนวนคู่ทั้งหมดที่จัดการแข่งขัน  
เพื่อให้ได้ผู้ชนะเลิศ คือ  $512 + 256 + 128$   
 $+ 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1,023$  คู่

## วิธี B

มีผู้เล่นทั้งหมดในรายการแข่งขันนี้  
1,024 คน  
มีเพียงคนเดียวเท่านั้นที่ชนะเลิศ  
จึงมีผู้แพ้ทั้งหมด 1,023 คน  
ผู้แพ้แต่ละคนมาจากการจับคู่แข่งขัน 1 คู่  
ดังนั้น จำนวนคู่ทั้งหมดที่จัดการแข่งขัน  
เพื่อให้ได้ผู้ชนะเลิศ คือ 1,023 คู่

ในปัจจุบันบิดามีอายุมากกว่าบุตร 25 ปี แต่อีก 5 ปี ข้างหน้า  
บิดาจะมีอายุ 45 ปี ปัจจุบันบุตรมีอายุเท่าไร

สมมติให้บุตรมีอายุ  $x$  ปี

ดังนั้นบิดามีอายุ  $x + 25$  ปี

อีก 5 ปีข้างหน้า บุตรมีอายุ  $x + 5$  ปี

บิดามีอายุ  $(x + 25) + 5$  ปี

เขียนสมการได้ดังนี้

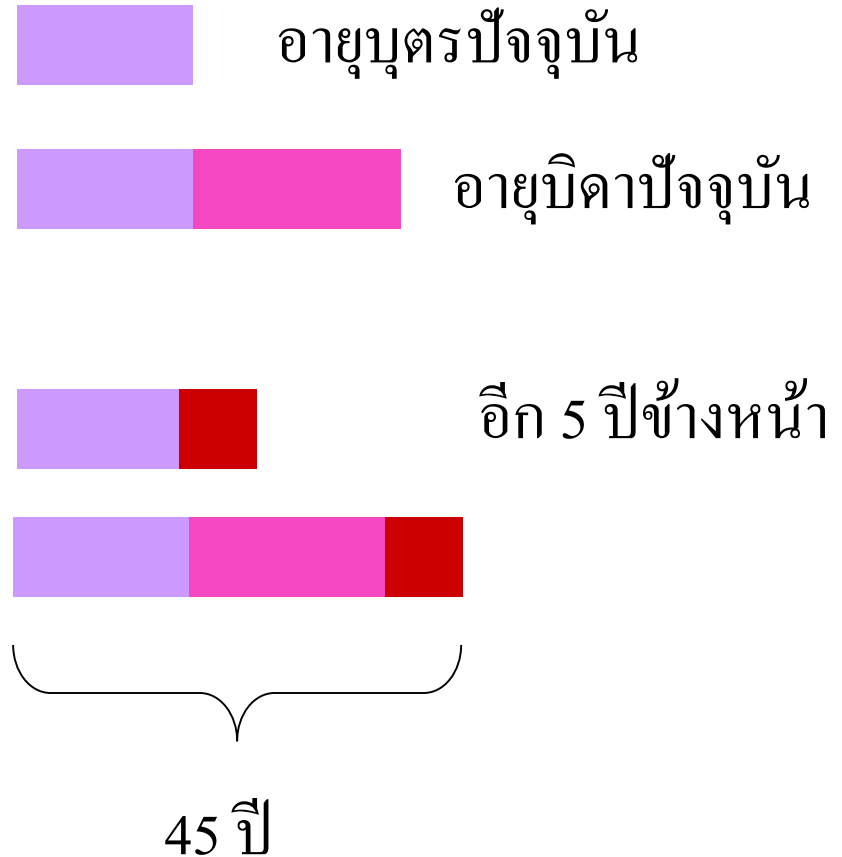
$$(x + 25) + 5 = 45$$

$$x + 30 = 45$$

$$x = 45 - 30$$

$$x = 15$$

ดังนั้นปัจจุบันบุตรอายุ 15 ปี



ตาสีขายข้าวได้เงิน 78,350 บาท ตาสาขายข้าวได้เงินน้อยกว่าตาสี 11,980 บาท  
ตาสีและตาสาขายข้าวได้เงินทั้งหมดเท่าไร

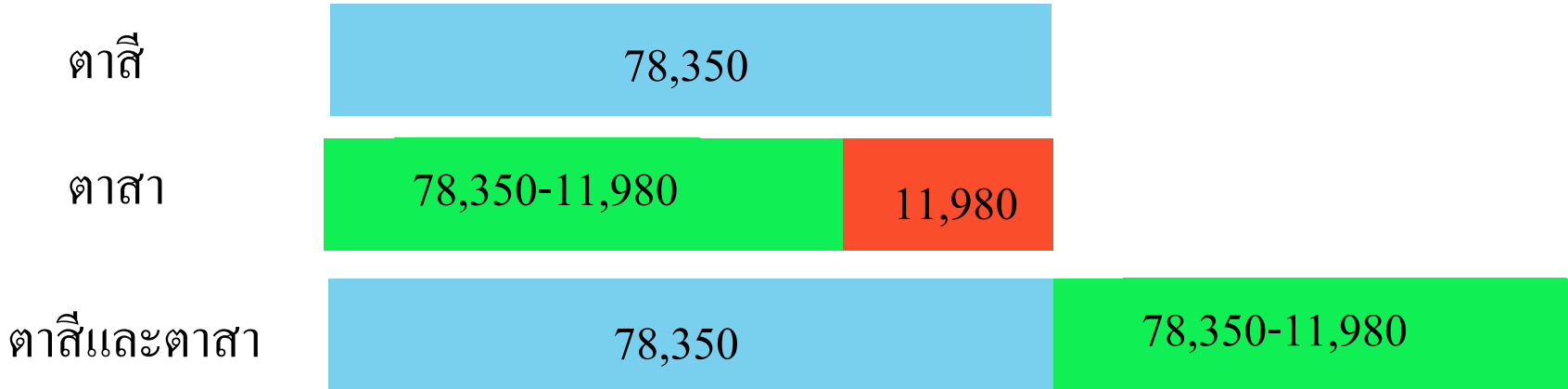
โจทย์ถามอะไร

ตาสีและตาสาขายข้าวได้เงินทั้งหมดเท่าไร

โจทย์กำหนดอะไรให้

ตาสีขายข้าวได้เงิน 78,350 บาท  
ตาสาขายข้าวได้เงินน้อยกว่าตาสี 11,980 บาท

วิเคราะห์โจทย์โดยวาดภาพ

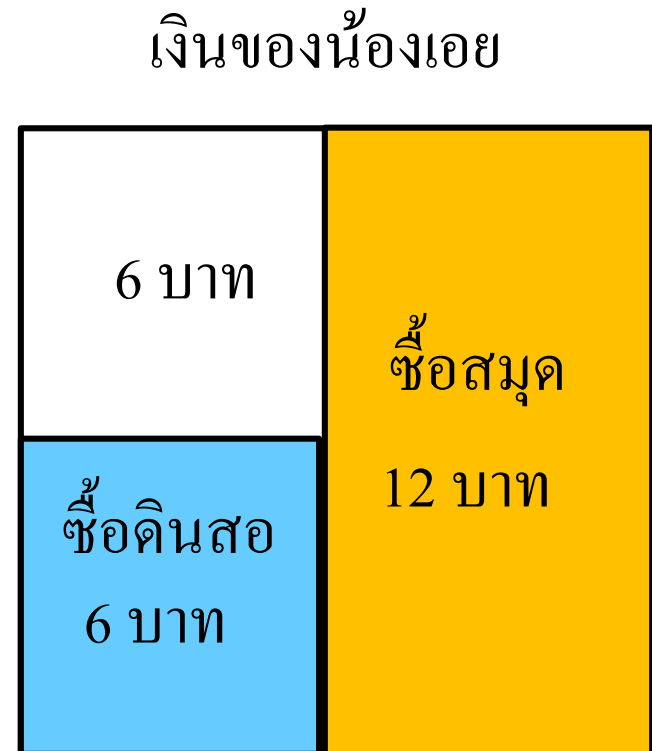


ประโยคสัญลักษณ์

$$78,350 + (78,350 - 11,980) = \square$$
$$(78,350 - 11,980) + 78,350 = \square$$

น้องเอย นำเงินครึ่งหนึ่งของเงินที่มีอยู่ไปซื้อสมุด แล้วนำเงินอีกครึ่งหนึ่งของเงินที่เหลือไปซื้อดินสอ ปรากฏว่าเหลือเงินอยู่ 6 บาท อยากทราบว่าน้องเอย ใช้เงินไปทั้งหมดกี่บาท

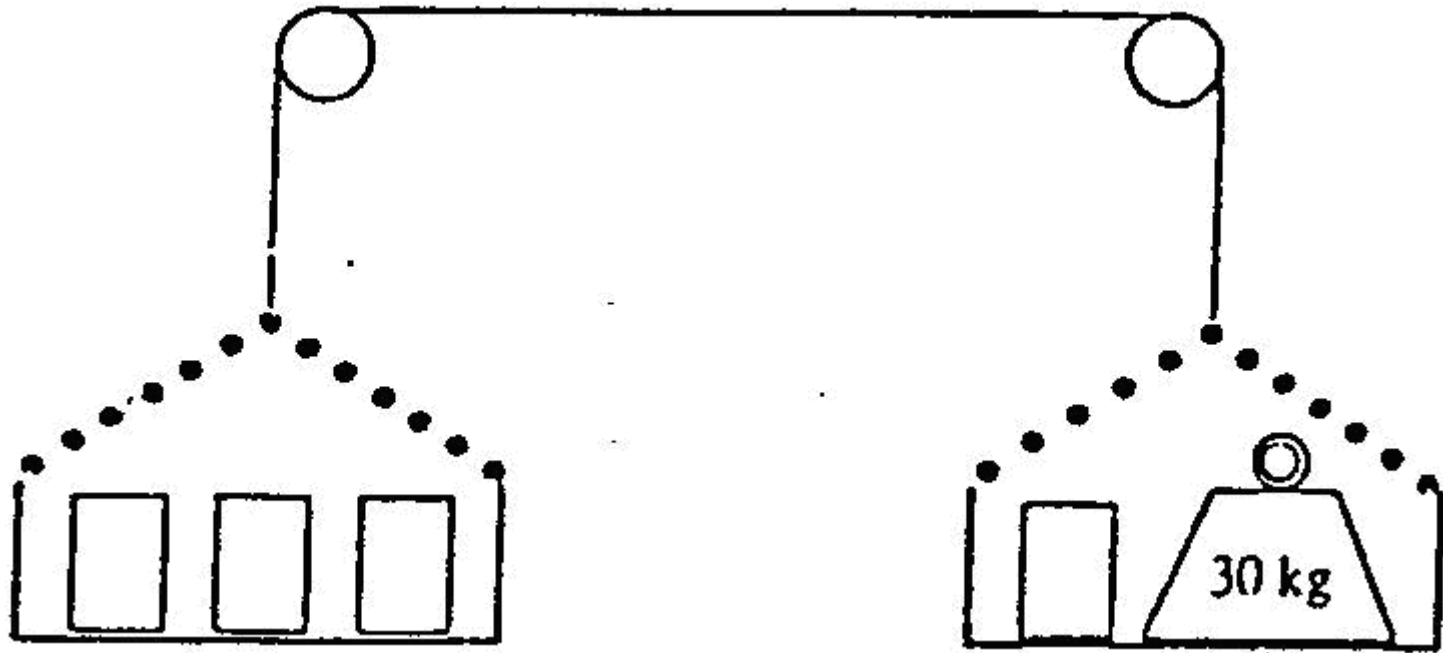
- นำเงินครึ่งหนึ่งของเงินที่มีอยู่ไปซื้อสมุด
- นำเงินอีกครึ่งหนึ่งของเงินที่เหลือไปซื้อดินสอ
- ปรากฏว่าเหลือเงินอยู่ 6 บาท



ดังนั้น น้องเอย ใช้เงินไปทั้งหมด  $12 + 6 = 18$  บาท

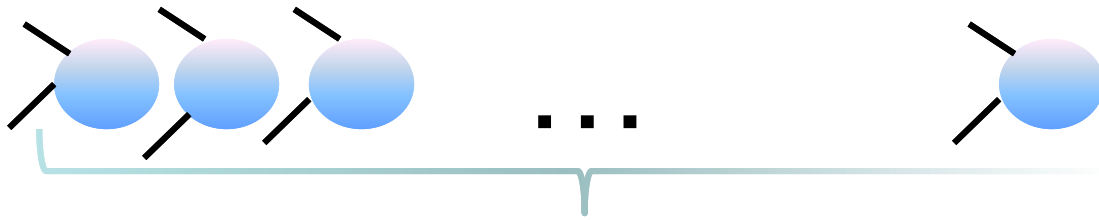


ถุงข้าวสารแต่ละถุงมีน้ำหนักเท่ากัน ถ้าตาชั่งอยู่ในสมดุล  
ดังรูป และตุ้มน้ำหนักหนัก 30 กิโลกรัม ข้าวสารแต่ละถุง  
หนักเท่าใด

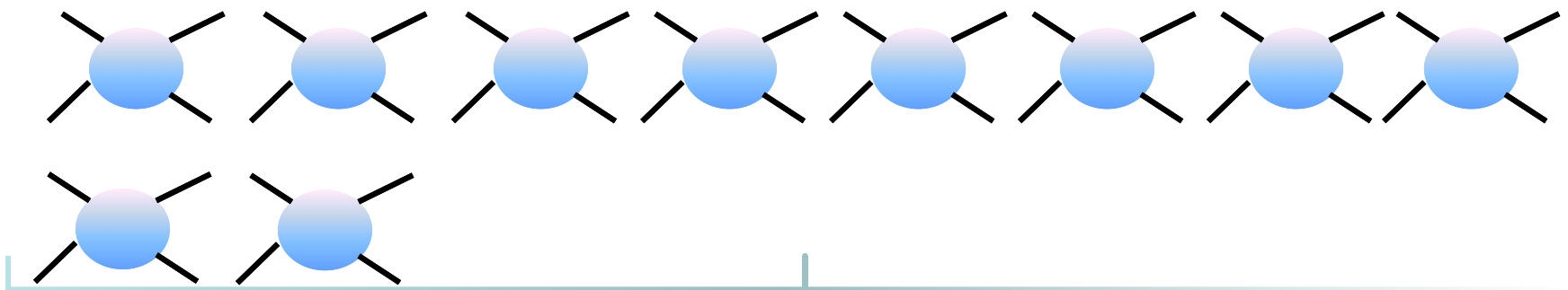


เอกรินทร์เลี้ยงม้าและไก่ไว้จำนวนหนึ่ง เมื่อนับหัวม้าและหัวไก่  
รวมกันได้ 50 หัว แต่นับขาม้าและขาไก่รวมกันได้ 120 ขา  
เอกรินทร์เลี้ยงม้าและไก่ไว้ย่่างละกี่ตัว

ใช้ยุทธวิธีใดในการแก้ปัญหา



50 หัว หัวละ 2 ขา ได้ 100 ขา

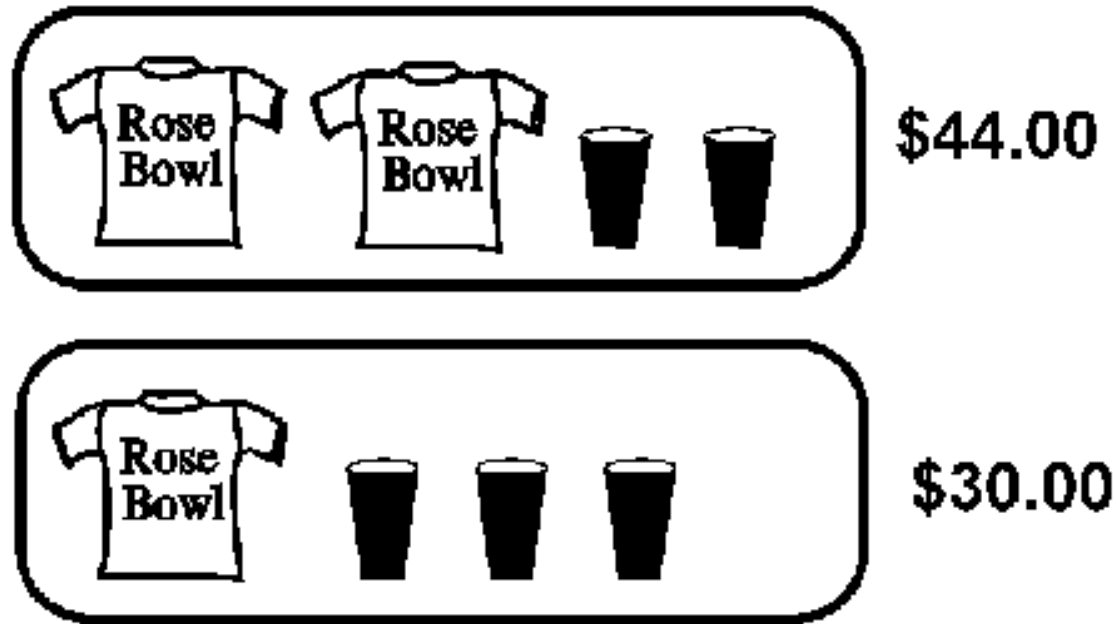


ขาดอีก 20 ขา จึงครบ 120 ขา จึงเติม 2 ขา อีก 10 หัว

ดังนั้น 10 หัว หัวละ 4 ขา ได้ 40 ขา

ที่เหลือ 40 หัว หัวละ 2 ขา ได้ 80 ขา

# ฝึกการสังเกตและการให้เหตุผล



เสียดายราคาตัวละเท่าไร และน้ำหวานราคาแก้วละเท่าไร

# Visualization

Solve  $x + y = 11$  and  $3x + y = 29$

$$x + y = 11$$

$$3x + y = 29$$

$$2x + x + y = 29$$

$$2x + 11 = 29$$

$$2x = 18$$

$$X = 9 \text{ and } y = 2$$

# Visualization

ให้  $n$  เป็นจำนวนนับ โดยที่  $1 \leq n \leq 26$  และ

$a = 1, b = 2, c = 3, \dots, z = 26$

ผลคูณของ  $(n - a)(n - b)(n - c) \dots (n - z)$

มีค่าเท่าใด



การพัฒนาทักษะ/กระบวนการ  
ในการแก้ปัญหา

Appreciation  
Interest  
Confidence  
Perseverance

Monitoring one's  
own thinking

Attitudes

Metacognition

Estimation and  
Approximation

Mathematical  
Problem solving

Mental calculation  
Communication

Skills

Processes

Use of mathematical tools  
Arithmetic manipulation  
Algebraic manipulation  
Handling data

Concepts

Thinking skills  
Heuristics

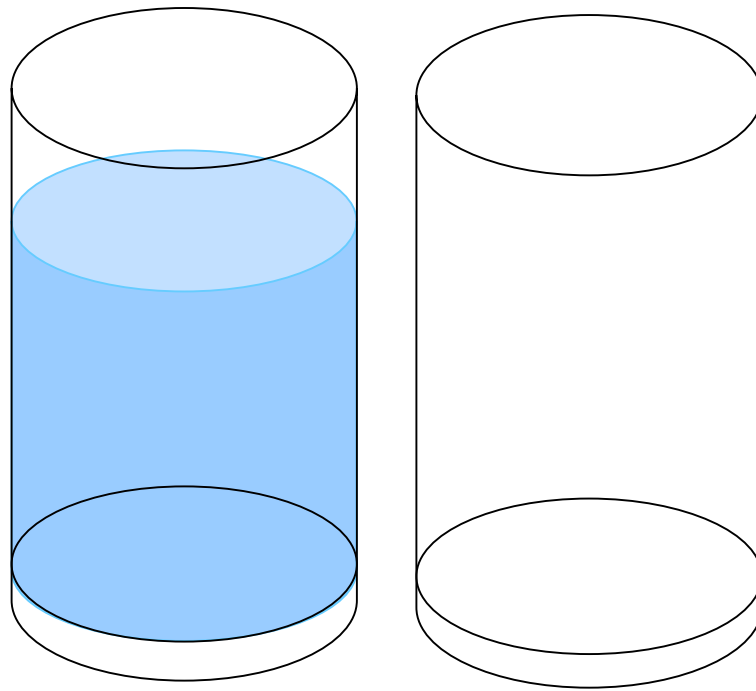
Numerical  
Geometrical  
Algebraic  
Statistical

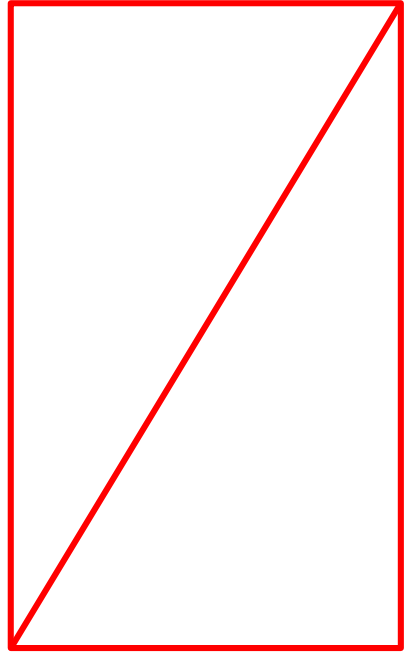
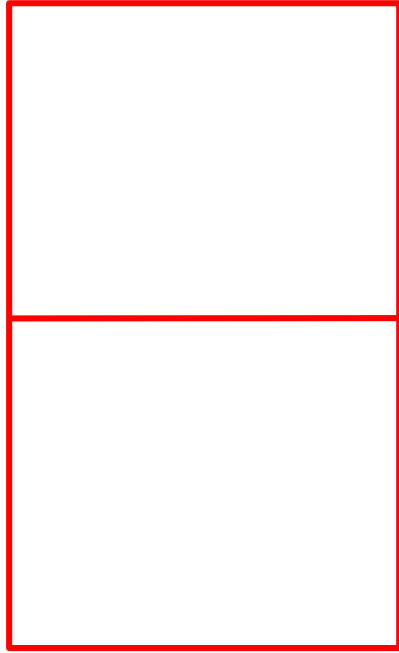
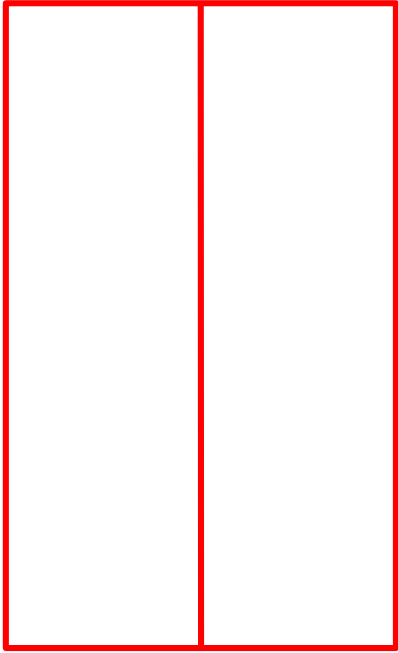


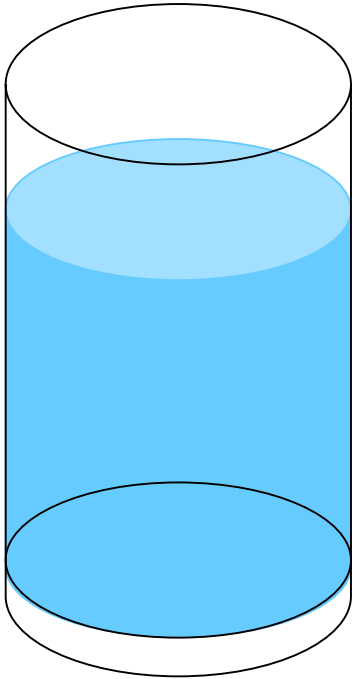
“โพลยา กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นวิธีการที่ให้  
ผลลัพธ์ตามที่ต้องการโดยที่ขณะนั้นยังไม่มีวิธีการ  
อยู่ในมือ ไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีที่การหา  
วิธีการ จะต้องพบกับความยุ่งยากและเต็มไปด้วย  
อุปสรรค...”

**Polya 1947:1**

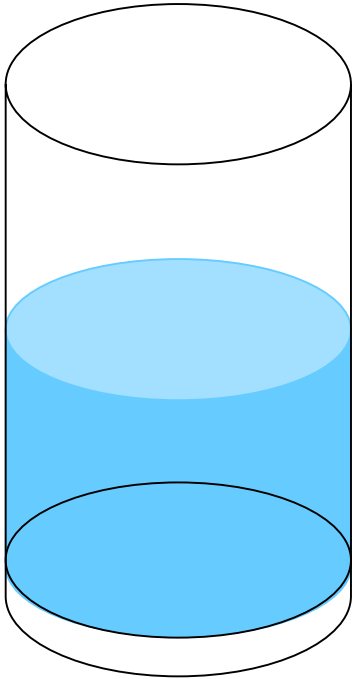
แก้วรูปทรงกระบอกขนาดเท่ากัน 2 ใบ  
ใบหนึ่งมีน้ำอยู่เกินครึ่งแต่ไม่เต็มแก้ว  
ถ้าต้องการน้ำครึ่งแก้วพอดีจะทำอย่างไร ?











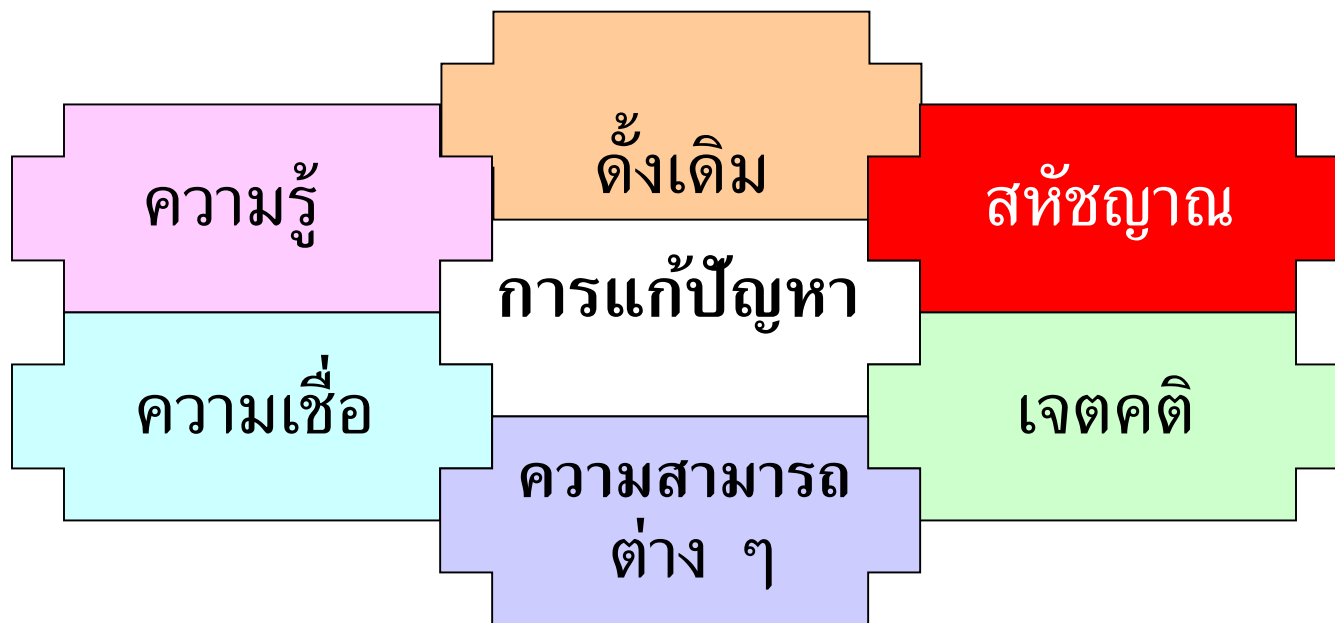
มีเรือ 3 ลำ เป็น เรือประมง เรือใบ และ เรือบรรทุกสินค้า ซึ่งทาสี  
ไม่ซ้ำกัน มีสีน้ำเงิน สีชมพู และ สีเขียว ถ้าทราบข้อมูลว่า

- เรือประมงกำลังออกจากฝั่ง ขณะที่เรือสีเขียว กำลังมุ่งหน้าเข้าสู่ฝั่ง
- เรือสีชมพู กำลังกางใบอยู่ใกล้ชายฝั่ง

อยากทราบว่า “ เรือบรรทุกสินค้า ทาสีอะไร ”

สีเรือ	ประเภท		
	เรือประมง	เรือใบ	เรือบรรทุกสินค้า
ชมพู	X	✓	X
เขียว	X	X	✓
น้ำเงิน		X	

# ประสบการณ์





# เป้าหมายของการสอนแก้ปัญหา :

- พัฒนาทักษะการคิด

- พัฒนาความสามารถที่จะเลือกและใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา

- พัฒนาเจตคติและความเชื่อเกี่ยวกับประโยชน์ของการแก้ปัญหา

# เป้าหมายของการสอนแก้ปัญหา :

- พัฒนาความสามารถที่จะใช้ความรู้ที่เกี่ยวข้อง
- พัฒนาความสามารถที่จะปรับปรุงแก้ไขและประเมินความคิดความก้าวหน้าในขณะแก้ปัญหา
- พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาในสถานการณ์การเรียนรู้แบบร่วมมือ
- พัฒนาความสามารถที่จะหาคำตอบที่ถูกต้องจากปัญหาแบบต่างๆ

# ขั้นตอนของการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา

ทำความเข้าใจปัญหา



วางแผน

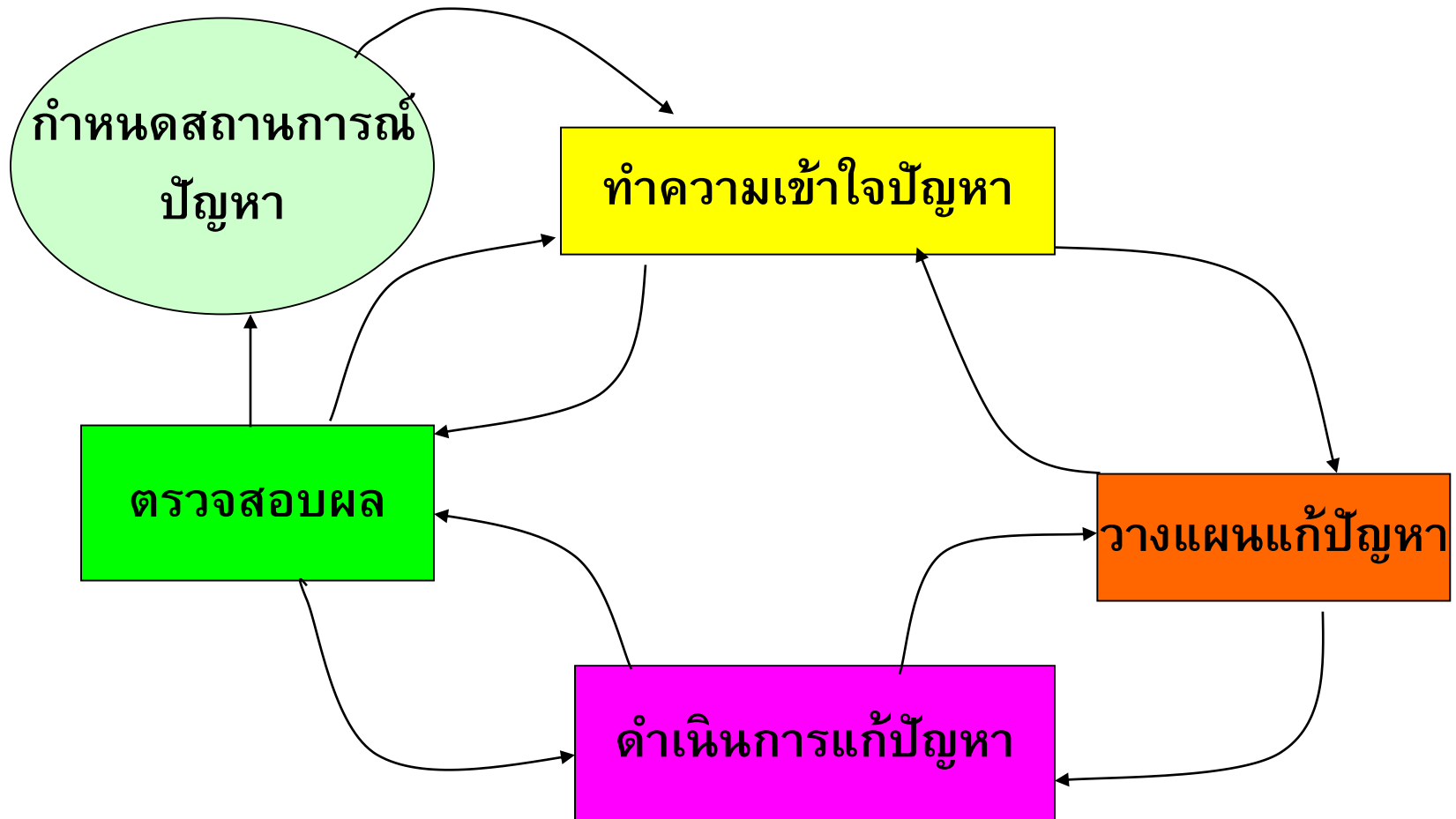


ดำเนินการแก้ปัญหา

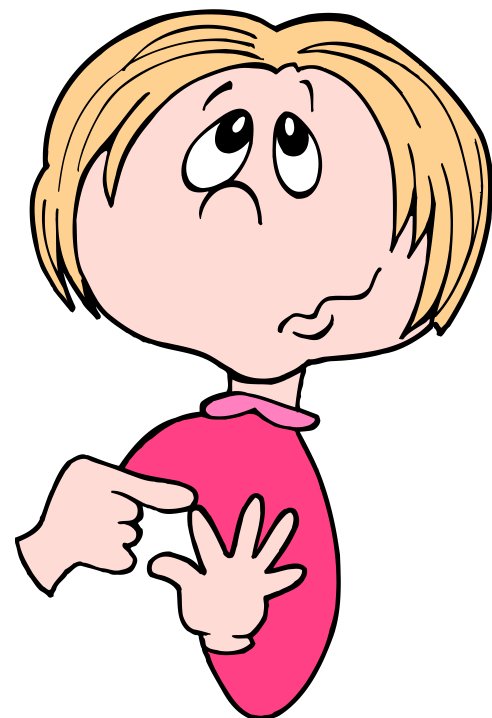


ตรวจสอบย้อนกลับ

กระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นของโพลยา ไม่ได้หมายความว่า  
จะต้องดำเนินการไปที่ละขั้นตอน ในทางปฏิบัติสามารถที่จะ  
คิดตรวจสอบย้อนกลับได้ตลอดเวลา ดังแผนภาพ



# ตัวอย่างปัญหาที่ดี





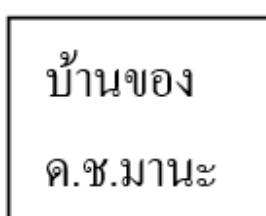
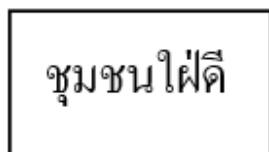
## เก็บหอมรอมริบ

(แผนผังแสดงที่ตั้งบ้านของ ด.ช.มานะ รักเรียน)



สะพาน

แม่น้ำ



๗๑ ๗๑  
ยุทธวิธี ในการแก้ปัญหา

# ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา

- การเดาและตรวจสอบ
- การแจกแจงรายการหรือสร้างตาราง
- การใช้แบบรูป
- การวาดรูปหรือใช้ตัวแบบ
- การตัดออก
- ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย
- การดำเนินการหรือการเขียนสมการ
- การหาเหตุผลที่สมเหตุสมผล
- การทำย้อนกลับ



# ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา: การเดาและตรวจสอบ

- 1) ให้นักเรียนคาดเดาคำตอบ
- 2) ตรวจสอบการเดากับเงื่อนไขต่าง ๆ ของปัญหา
- 3) ใช้ข้อมูลที่ได้รับจากการตรวจสอบเพื่อทำให้การเดามีประสิทธิภาพขึ้น
- 4) ดำเนินกระบวนการต่อไปจนกระทั่งได้คำตอบที่ถูกต้อง

**ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา :**

**การแจกแจงรายการ หรือ สร้างตาราง**

# ซื้ออย่างไร...จึงจะประหยัด

ร้านขายส่งน้ำตาลทราย มีน้ำตาลทรายใส่ถุง 2 ชนิด คือ น้ำตาลทรายชนิดที่ 1 ขนาดถุงละ 3 กิโลกรัม ขายราคาถุงละ 36 บาท และน้ำตาลทรายชนิดที่ 2 ขนาดถุงละ 4 กิโลกรัม ขายราคาถุงละ 42 บาท แม่ต้องการน้ำตาลทรายทั้งสองชนิดรวม 48 กิโลกรัม เพื่อมาผสมทำขนมขาย แม่ควรจะซื้อน้ำตาลทั้งสองชนิดอย่างละกี่ถุงจึงจะพอดีและประหยัดเงินที่สุด

เฉลย

# ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา : การใช้แบบรูป

- 1) การวิเคราะห์แบบรูปและหารูป (กรณี)   
ทั่วไปจากการสังเกต
- 2) ตรวจสอบรูป (กรณี) ทั่วไปจากข้อมูลที่รู้
- 3) สร้างแบบแผนการพิสูจน์เพื่อตรวจสอบ   
รูป (กรณี) ทั่วไป

# การนำความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบไปหาจำนวนตัวประกอบทั้งหมดของจำนวนนับ

- 72 มีตัวประกอบทั้งหมดกี่จำนวน
- แยกตัวประกอบของ 72
- $72 = 2^3 \times 3^2$
- 72 มีตัวประกอบทั้งหมด 12 จำนวน

## การหาจำนวนตัวประกอบทั้งหมดของจำนวนนับ

$$20 = 2^2 \times 5$$

20 มีตัวประกอบทั้งหมด 6 จำนวน

$$24 = 2^3 \times 3$$

24 มีตัวประกอบทั้งหมด 8 จำนวน

$$25 = 5 \times 5 = 5^2$$

25 มีตัวประกอบทั้งหมด 3 จำนวน

**สังเกตแบบรูปที่เกิดขึ้น**

**ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา : การสร้างตัวแบบ**

**หรือการใช้ตัวแบบ**

# การใช้ตัวแบบ

การใช้ตัวแบบ เป็นการแก้ปัญหาที่เด็กใช้ตัวแบบเป็นตัวแทนของสิ่งที่กล่าวถึงใน โจทย์มาใช้ในการลงมือปฏิบัติจริง เพื่ออธิบายถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เช่น แบ่งกลุ่มตามที่โจทย์ระบุ ซึ่งตัวแบบนั้นอาจเป็นของจริงที่จับต้องได้ หรือ ตัวนับ กระดาษลูกคิด ไม้จิ้มฟัน ตะเกียบ เป็นต้น



ปัญหา : ขนมอบ้างราคาแผ่นละ **2** บาท ถ้ามีเงิน **8** บาท  
จะซื้อขนมปังบ้างได้กี่แผ่น



## ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา : การตัดออก

1. เลือกใช้ร่องรอย / เงื่อนไขของปัญหาอย่างระมัดระวัง

ตัดส่วนที่ไม่เกี่ยวข้องกับส่วนใหญ่ออกไป

2. ใช้การให้เหตุผลทางตรง

3. ใช้การให้เหตุผลทางอ้อม

↓  
ตรวจคำตอบที่มีความเป็นไปได้และ  
คำตอบที่มีข้อขัดแย้งกับเงื่อนไข

## ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา : การทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. การเปลี่ยนสถานการณ์ให้มีจำนวนน้อยลง
2. การแบ่งปัญหาเป็นปัญหาย่อยต่าง ๆ

# การเปลี่ยนสถานการณ์ให้มีจำนวนน้อยลง

ผู้นำประเทศจากยี่สิบแปดประเทศมาประชุมร่วมกัน  
ถ้าผู้นำแต่ละคนต้องแลกของที่ระลึกกับผู้นำที่มาจาก  
ประเทศอื่นอีกยี่สิบเจ็ดประเทศ จะมีการแลกของที่  
ระลึกทั้งหมดกี่ครั้ง

George Pólya, a mathematician famous for problem solving, said that when you have a tough problem you should make the numbers simpler.

Twenty-eight may just be too many!  
Let's change it:

# ปัญหาที่จัดใหม่

ผู้นำประเทศจากห้าประเทศมาประชุมร่วมกัน  
ถ้าผู้นำแต่ละคนต้องแลกเปลี่ยนที่ระลึกกับผู้นำที่มาจาก  
ประเทศอื่นอีกสี่ประเทศ จะมีการแลกเปลี่ยนที่ระลึก  
ทั้งหมดกี่ครั้ง

# What was your approach to solving this problem?

1. List them all
2. Do addition
3. Draw points and arrows
4. Make a star
5. Make a grid
6. Look for a pattern
7. Use a formula
8. Just do it

# List Them All

สมมติชื่อของผู้นำประเทศทั้ง 5 เป็น A, B, C, D และ E.  
เริ่มต้นจาก A

A-B, A-C, A-D, A-E

B-A, B-C, B-D, B-E

C-A, C-B, C-D, C-E

D-A, D-B, D-C, D-E

E-A, E-B, E-C, E-D

ดังนั้นจะมีการแลกของที่ระลึกกันทั้งหมด 20 ครั้ง



# Do Addition

สมมติชื่อของผู้นำประเทศทั้ง 5 เป็น A, B, C, D และ E.

A แลกของที่ระลึกกับผู้นำประเทศ 4 คน

B แลกของที่ระลึกกับผู้นำประเทศ 4 คน

C แลกของที่ระลึกกับผู้นำประเทศ 4 คน

D แลกของที่ระลึกกับผู้นำประเทศ 4 คน

E แลกของที่ระลึกกับผู้นำประเทศ 4 คน

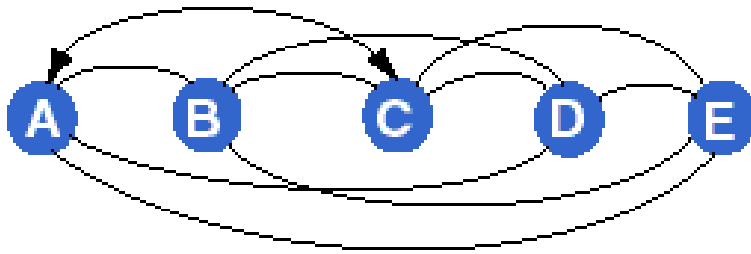
นำจำนวนทั้งหมดมาบวกกัน

ดังนั้นมีการแลกของที่ระลึกกันทั้งหมด 20 ครั้ง

# Draw Points and Arrows

สมมติชื่อของผู้นำประเทศทั้ง 5 เป็น A, B, C, D และ E.

เขียนลูกศรแต่ละคู่ของการแลกของที่ระลึก และนับจำนวนลูกศรทั้งหมด



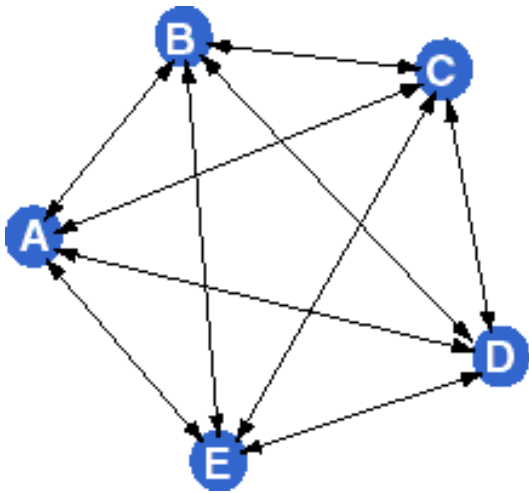
จะเห็นว่ามียูกศร **10** อัน ซึ่งแทนการแลกของที่ระลึกกันของคนสองคน

ดังนั้นลูกศร **10** อัน จึงแทนการแลกของที่ระลึกกันทั้งหมด **20** ครั้ง

# Make a Star

การหาคำตอบวิธีนี้คล้ายกับการเขียนจุดและลูกศร  
แต่ต่างกันว่าวางจุดไว้คนละแนว

สมมติชื่อของผู้นำประเทศทั้ง 5 เป็น A, B, C, D และ E.



ทุกๆ ลูกศรจะแทนการแลกของที่ระลึก  
ของคน **2** คน  
และลูกศรแต่ละอันมีหัวลูกศร **2** ด้าน

ดังนั้นลูกศร **10** อัน จึงแทนการแลกของที่ระลึกกันทั้งหมด **20** ครั้ง

# Make a Grid

สมมติชื่อของผู้นำประเทศทั้ง 5 เป็น A, B, C, D และ E.

สร้างตารางของผู้นำทุกคน

	A	B	C	D	E
A	■	■	■	■	■
B	■	■	■	■	■
C	■	■	■	■	■
D	■	■	■	■	■
E	■	■	■	■	■

นับจำนวนช่องสี่ชมพู (20)

หรือสังเกตว่ามีช่องทั้งหมด  $5 \times 5 = 25$  ช่อง

ลบช่องสี่เทาออก 5 ช่อง

ดังนั้น  $25 - 5 = 20$  ครั้ง

# Look for a Pattern

พิจารณาจากจำนวนที่มีค่าน้อยๆ

ถ้ามีผู้นำเพียง 1 คน จะมีการแลกของที่ระลึก 0 ครั้ง

ถ้ามีผู้นำเพียง 2 คน จะมีการแลกของที่ระลึก 2 ครั้ง

ถ้ามีผู้นำ 3 คน จะมีการแลกของที่ระลึก 6 ครั้ง

ถ้ามีผู้นำ 4 คน จะมีการแลกของที่ระลึก 12 ครั้ง

แบบรูปที่เกิดขึ้นคือ... 0, 2, 6, 12, ...

จำนวนถัดไปคือ... 20

ดังนั้นจะมีการแลกของที่ระลึกกันทั้งหมด 20 ครั้ง

# Use a Formula

เรารู้ว่าถ้ามีผู้นำ  $n$  คน

แต่แต่ละคนจะแลกเปลี่ยนของที่ระลึกได้...  $(n - 1)$  ครั้ง

ดังนั้นจำนวนครั้งที่มีการแลกเปลี่ยนของที่ระลึกกัน

เท่ากับ  $n(n - 1)$

ถ้า  $n = 5$

คำตอบที่ได้จึงเท่ากับ  $5 \times 4 = 20$  ครั้ง

# Just Do It (การคิดที่สละสลวย)

ถ้าไม่นับตัวเอง

ผู้นำแต่ละคนต้องให้ของที่ระลึกกับผู้นำคนอื่น 4 คน

แต่มีผู้นำทั้งหมด 5 คน

ใช้การนับจำนวนของที่ระลึกที่ผู้นำแต่ละคนต้องแลกเปลี่ยน

ดังนั้นมีการแลกของที่ระลึกกันทั้งหมด 20 ครั้ง

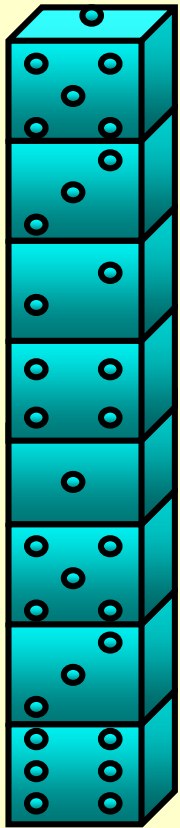
## ถ้าย้อนกลับไปที่ปัญหาเดิม

ผู้นำประเทศจากยี่สิบแปดประเทศมาประชุมร่วมกัน  
ถ้าผู้นำแต่ละคนต้องแลกของที่ระลึกกับผู้นำจาก  
ประเทศอื่นอีกยี่สิบเจ็ดประเทศ จะมีการแลกของที่  
ระลึกทั้งหมดกี่ครั้ง



# ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา : เลือกรการดำเนินการ หรือเขียนสมการ

เช่น ลูกเต๋า 8 ลูกวางซ้อนกัน จงหาจำนวนจุดจากหน้าที่มองไม่เห็น



ผลรวมจำนวนจุดบนหน้าที่มองไม่เห็นเท่ากับ

$$(8 \times 21) - 30 = 138 \quad (\text{เพราะเหตุใด ?})$$

# ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา : ใช้การหาเหตุผลที่สมเหตุสมผล

**ตัวอย่าง** การแก้ปัญหาที่ใช้การให้เหตุผล

**สถานการณ์ปัญหา** บริษัทโคเนื้อเกษตรกรรมไทยจังหวัด  
ขอนแก่นมีโคเนื้อ 10,000 ตัว ต้องการขนโคเนื้อทั้งหมดเข้า  
กรุงเทพมหานคร **จงหาเหตุผลในการตอบคำถามต่อไปนี้**

ถ้ามีรถบรรทุกโค 4 คัน มีคนขับ 4 คน คาดว่าจะต้อง  
ใช้เวลาในการขนส่งกี่วันเพราะเหตุใด

# ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา : การทำย้อนกลับ

เช่น เล่นเกมผลรวม 60 มีกติกาว่า ให้เด็กสองคนสลับกันเลือกจำนวน ครั้งละหนึ่งจำนวน จาก 1, 2, 3, 4 หรือ 5 และช่วยกันหาผลบวกของจำนวนที่เลือกมาทุกครั้ง สลับกันเลือกจำนวนไปเรื่อยๆ จนกระทั่งใครเลือกจำนวนและมีผลบวกเป็น 60 จะเป็นผู้ชนะ

จะเล่นเกมอย่างไร จึงจะเป็นผู้ชนะอย่างแน่นอน

เราอาจใช้แนวทางแก้ปัญหานี้โดยใช้ยุทธวิธีการทำย้อนกลับได้

โดยพิจารณาผลบวกครั้งก่อน รวมกับผลบวกของคนสองคนเป็น 60

พิจารณาผลลัพธ์ครั้งก่อนๆ เป็น 54, 48, 42, 36, 30, 24, 18, 12, 6

นั่นคือถ้าเราเล่นเป็นคนที่สอง และทำให้ผลบวกเป็น 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54

เราจะเป็นผู้ชนะ

# การประเมินความก้าวหน้าในการแก้ปัญหา

(1)

ประเมินผลสัมฤทธิ์  
ในการใช้ทักษะและ  
ยุทธวิธีต่าง ๆ

(2)

ประเมินเจตคติและ  
ความเชื่อที่เกี่ยวกับ  
การแก้ปัญหา